# 第18講 定積分関数

# PART1 定積分で表された関数

## 要点整理と公式

### 要点① 定積分で表された関数の微分

$a$ を定数とするとき，定積分 $\int_a^x f(t)\,dt$ は上端 $x$ の関数である。$f(t)$ の不定積分の 1 つを $F(t)$，すなわち $F'(t)=f(t)$ とすると，$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)$ であり，この式の両辺を $x$ で微分することにより，次の公式が得られる。

**定積分で表された関数の微分**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x) \qquad (a \text{ は定数})$$

(ex) 関数 $\int_1^x e^t \sin t\,dt$ を $x$ で微分すると

関数 $F(x)=\int_0^x (x+t)\sin t\,dt$ は $x$ の関数であるが，$\int_0^x (x+t)\sin t\,dt$ の積分計算においては，積分変数は $t$ であるため，積分変数ではない $x$ を「　　」として

$$\int_0^x (x+t)\sin t\,dt=\int_0^x (x\sin t+t\sin t)\,dt= \qquad \int_0^x \sin t\,dt+\int_0^x t\sin t\,dt$$

と変形することができる。よって

$$F(x)=x\int_0^x \sin t\,dt+\int_0^x t\sin t\,dt$$

より，この式の両辺を $x$ で微分すると

$$F'(x)=(x)'\int_0^x \sin t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt\right)+\frac{d}{dx}\int_0^x t\sin t\,dt$$

$$=1\cdot\int_0^x \sin t\,dt+x\cdot \qquad +$$

$$=\left[-\cos t\right]_0^x+2x\sin x=-\cos x+1+2x\sin x=2x\sin x-\cos x+1$$

として，$F(x)$ の導関数を求めることができる。

[MEMO]

**1** 次の関数を $x$ で微分せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^x (t-2)e^t\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2x} \cos^2 t\,dt$　　(3) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin 3t\,dt$

# Point Pickup

**定積分で表された関数の微分**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad (a\text{ は定数})$$

積分計算において，積分変数ではない文字は「定数」として扱う。

# 第 18 講　PART1 確認問題

次の関数を $x$ で微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

**1** $\int_1^x (t+1)e^t\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_1^x (t+1)e^t\,dt = \boxed{\text{ア}}$$

① $xe^x$　　② $(x+1)e^x$

③ $-(x+1)e^x$　　④ $(t+1)e^t$

**2** $\int_0^{2x} \sin^2 t\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} \sin^2 t\,dt = \boxed{\text{イ}}$$

① $\sin^2 x$　　② $\sin^2 2x$

③ $2\sin^2 2x$　　④ $\frac{1}{2}\sin^2 2x$

**3** $\int_0^x (x-t)\cos 2t\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\cos 2t\,dt = \boxed{\text{ウ}}$$

① $\sin 2x$　　② $\cos 2x$

③ $2\sin 2x$　　④ $\frac{1}{2}\sin 2x$

# 第 18 講　定積分関数

## PART1　定積分で表された関数

**1**　次の関数を $x$ で微分せよ。

(1) $\int_1^x (t-2)e^t\,dt$　　(2) $\int_0^{2x} \cos^2 t\,dt$　　(3) $\int_0^x (x-t)\sin 3t\,dt$

**[解答]**

(1) $\dfrac{d}{dx}\int_1^x (t-2)e^t\,dt=(x-2)e^x$

(2) $\cos^2 t$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とすると，$F'(t)=\cos^2 t$

$$\int_0^{2x} \cos^2 t\,dt=[F(t)]_0^{2x}=F(2x)-F(0)$$

よって　$\dfrac{d}{dx}\int_0^{2x} \cos^2 t\,dt=F'(2x)\cdot(2x)'-F'(0)=2\cos^2 2x$

(3) $\int_0^x (x-t)\sin 3t\,dt=x\int_0^x \sin 3t\,dt-\int_0^x t\sin 3t\,dt$ より

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\sin 3t\,dt=1\cdot\int_0^x \sin 3t\,dt+x\sin 3x-x\sin 3x$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\cos 3t\right]_0^x=-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}$$

# 第18講 PART1 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：②

**[解説]**

$$\frac{d}{dx}\int_1^x (t+1)e^t\,dt = \boldsymbol{(x+1)e^x}$$ [A]

> [A] $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$
> ($a$ は定数)

## 2

**[正解]** イ：③

**[解説]**

$\sin^2 t$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とすると,

$$F'(t) = \sin^2 t$$

$$\int_0^{2x} \sin^2 t\,dt = [F(t)]_0^{2x} = F(2x) - F(0)$$

よって,

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} \sin^2 t\,dt = F'(2x)\cdot(2x)' - \{F(0)\}'$$

[B]

$$= 2F'(2x)$$

$$= \boldsymbol{2\sin^2 2x}$$

> [B] 積分区間の上端が $x$ ではなく $2x$ であることに注意する。

**3**　**[正解] ウ：④**

**[解説]**

$$\int_0^x (x-t)\cos 2t\,dt$$

$$= x\int_0^x \cos 2t\,dt - \int_0^x t\cos 2t\,dt \quad \text{[C]}$$

[C]　$x$ を定数とみて，定積分の外に出す。

よって，

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\cos 2t\,dt$$

$$= 1\cdot\int_0^x \cos 2t\,dt + x\cos 2x - x\cos 2x \quad \text{[D]}$$

$$= \int_0^x \cos 2t\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^x$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

[D]　$x\int_0^x \cos 2t\,dt$ を $x$ で微分すると，

$$(x)'\cdot\int_0^x \cos 2t\,dt + x\cdot\frac{d}{dx}\int_0^x \cos 2t\,dt$$

$\int_0^x t\cos 2t\,dt$ を $x$ で微分すると，

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t\cos 2t\,dt = x\cos 2x$$